KESTABILAN MODEL MANGSA PEMANGSA DENGAN FUNGSI RESPON TIPE HOLLING II DAN WAKTU TUNDA

Budyanita Asrun
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Hasanuddin
itha.asrun@gmail.com

Abstrak

Dalam tulisan ini, dibahas model mangsa pemangsa yang telah dimodifikasi dari model dasar Lotka Volterra dengan penambahan fungsi respon Tipe Holling II pada interaksi antara populasi mangsa dan pemangsa, serta pemberian waktu tunda pada laju pertumbuhan pemangsa. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui pengaruh waktu tunda pada kestabilan titik keseimbangan model mangsa pemangsa dengan fungsi respon tipe Holling II.Hasil penelitian menunjukkan bahwa dari model mangsa pemangsa dengan fungsi respon tipe Holling II diperoleh tiga titik keseimbangan, yaitu $E_0 = (0,0)$, $E_1 = (\frac{a}{\varepsilon}, 0)$ *dan* $E_2 = \left(\frac{c}{d-\alpha c}, \frac{(ad-\varepsilon c-\alpha ac)d}{b(d-\alpha c)^2}\right)$. *Dari hasil analisis diperoleh dua titik keseimbangan yang dapat stabil pada kondisi syarat tertentu, yaitu titik keseimbangan* $E_1 = (\frac{a}{\varepsilon}, 0)$ *stabil jika* $ad - \varepsilon c - \alpha ac < 0$ *dan titik keseimbangan* $E_2 = \left(\frac{c}{d-\alpha c}, \frac{(ad-\varepsilon c-\alpha ac)d}{b(d-\alpha c)^2}\right)$ *stabil jika* $\varepsilon d - \alpha ad + \alpha \varepsilon c + \alpha^2 ac > 0$. *Waktu tunda dapat mempengaruhi kestabilan titik keseimbangan* E_2 *dari stabil menjadi tidak stabil.*

Kata Kunci : *Mangsa Pemangsa, Lotka Volterra , Fungsi Respon Tipe Holling II, Waktu Tunda*

A. PENDAHULUAN

Model mangsa pemangsa yang paling terkenal dinamai setelah dua ilmuwan, Alfred Lotka dan Vito Volterra memperkenalkannya pada tahun 1926.Asumsi dasar dari model mangsa pemangsa Lotka Volterra klasik adalah bahwa setiap populasi mengalami pertumbuhan atau peluruhan eksponensial dalam ketiadaan yang lain. Kemudian model mangsa pemangsa Lotka Volterra dimodifikasi dengan menambahkan asumsi bahwa jumlah populasi juga dipengaruhi oleh adanya tingkat kompetisi didalam populasi tersebut (Olinick, 2006).

Salah satu pengembangan lain dari model Lotka Volterra adalah model yang dilakukan oleh Ruan dkk (2001), Liudkk (2002), serta Tiandkk(2011), dimana dalam model Lotka Voltera diberikan penambahan fungsi respon tipe Holling II pada interaksi antara mangsa dan pemangsa. Kemudian untuk membangun model yang lebih realistis Beretta dkk (1996) dan Ruan (2009) mempertimbangkan waktu tunda (time delay) untuk jangka respon pemangsa

terhadap mangsa. Penambahan jumlah populasi pemangsa diperlukan adanya waktu tunda, hal ini diasumsikan bahwa penggunaan waktu tunda pada sistem tersebut disebabkan karena adanya waktu yang diperlukan populasi pemangsa dalam memangsa mangsanya.Kemudian Teng dkk (2011) juga melakukan hal yang sama memberikan waktu tunda pada fungsi respon tipe Holling II pada kompartemen yang sama. Tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui pengaruh waktu tunda pada kestabilan titik keseimbangan model mangsa pemangsa dengan fungsi respon tipe Holling II.

B. BAHAN DAN METODE

Secara umum desain penelitian yang dilakukan adalah menentukan titik keseimbangan model, melinearisasi model, menganalisis kestabilan dari titik keseimbangan, kemudian melakukan simulasi numerik. Adapun variabel penelitian adalah sejauh mana pengaruh waktu tunda terhadap kestabilan dari suatu titik keseimbangan baik secara analitik maupun numerik. Kemudian software komputasi yang digunakan pada penelitian ini adalah dengan menggunakan Maple dan Matlab.

C. HASIL

Model mangsa pemangsa dengan fungsi respon tipe Holling II dan waktu tunda yang telah linearisasi disekitar titik keseimbanganE^*

$$\dot{\mathrm{X}}(t) = \left(a - 2\varepsilon x^* - \frac{by^*}{(1+\alpha x^*)^2}\right)\mathrm{X(t)} - \frac{bx^*}{(1+\alpha x^*)}\mathrm{Y(t)},$$

$$\dot{\mathrm{Y}}(t) = \left(\frac{dy^*}{(1+\alpha x^*)^2}\right)\mathrm{X(t-\tau)} + \left(-c + \frac{dx^*}{(1+\alpha x^*)}\right)\mathrm{Y(t)},$$

Dari model mangsa pemangsa dengan fungsi respon tipe Holling II diperoleh tiga titik keseimbangan, yaitu $E_0 = (0,0),\ E_1 = (\frac{a}{\varepsilon}, 0)$ dan$E_2 = \left(\frac{c}{d-\alpha c}, \frac{(ad-\varepsilon c-\alpha ac)d}{b(d-\alpha c)^2}\right)$. Dari hasil analisis diperoleh dua titik keseimbangan yang dapat stabil pada kondisi syarat tertentu, yaitu titik keseimbangan $E_1 = (\frac{a}{\varepsilon}, 0)$ stabil jika $ad - \varepsilon c - \alpha ac < 0$ dan titik keseimbangan $E_2 = \left(\frac{c}{d-\alpha c}, \frac{(ad-\varepsilon c-\alpha ac)d}{b(d-\alpha c)^2}\right)$ stabil jika $\varepsilon d - \alpha ad + \alpha\varepsilon c + \alpha^2 ac > 0$.Dengan pemberian waktu tundadiperoleh nilai $\tau > 0$ yang dapat mengubah kestabilan dari titik keseimbangan $E_2\left(\frac{c}{d-\alpha c}, \frac{(ad-\varepsilon c-\alpha ac)d}{b(d-\alpha c)^2}\right)$ dari stabil menjadi tidak stabil.

Analisis pada titik keseimbangan E_2.Untuk $\tau = 0$, dengan mensubstitusi

titik keseimbangan E_2, maka diperoleh persamaan karakteristik

$$\lambda^2 + \frac{(\varepsilon d - \alpha a d + \alpha\varepsilon c + \alpha^2 ac)\, c}{d(d - \alpha c)}\lambda + \frac{(ad - \varepsilon c - \alpha ac)c}{d} = 0,$$

dimana bagian real dari nilai eigen akan bernilai negatif dan disimpulkan stabil jika dan hanya jika

$$\varepsilon d - \alpha a d + \alpha\varepsilon c + \alpha^2 ac > 0.$$

Untuk $\tau \neq 0$, misalkan $\lambda = iw$, $w > 0$ adalah akar-akar persamaan karakteristik, maka diperoleh persamaan karakteristik

$$w^4 + \left(\frac{(\varepsilon d - \alpha a d + \alpha\varepsilon c + \alpha^2 ac)\, c}{d(d - \alpha c)}\right)^2 w^2 - \left(\frac{(ad - \varepsilon c - \alpha ac)c}{d}\right)^2 = 0,$$

Hasil analisis menunjukkan bahwa dengan menggunakan aturan tanda Descartes persamaan polinomial w diatas akan menghasilkan satu akar real positif. Selanjutnya dapat diperoleh nilai $\tau > 0$ yang dapat mempengaruhi kestabilan dari titik kesetimbangan tersebut.

Simulasi dilakukan menggunakan nilai parameter yang diberikan oleh Xiodkk (2011),yaitu $a = 1.2, b = 0.1, c = 0.2, d = 0.4,\ \varepsilon = 0.6$ dan$\alpha = 0.1$. Gambar 1,2,3,4,dan 5 memperlihatkan pengaruh waktu tunda terhadap kestabilan titik keseimbangan E_2 dari kondisi stabil menjadi tidak stabil.

D. PEMBAHASAN

Penelitian menunjukkan bahwa kestabilan dari model ditentukan dari beberapa syarat kondisi. Sementara pemberian waktu tunda karena mempertimbangkan adanya waktu yang diperlukan populasi pemangsa dalam memangsa mangsanya membuat penambahan jumlah populasi pemangsa akibat proses predasi mengalami penundaan waktu dapat memberikan pengaruh terhadap kestabilan dari suatu titik keseimbangan.

Misal $x = x(t)$ dan $y = y(t)$ menyatakan jumlah populasi mangsa dan pemangsa pada waktu t, model mangsa pemangsa Lotka Volterra klasik sebagai berikut

$$\dot{x} = ax - bxy,$$
$$\dot{y} = dxy - cy, (1)$$

dimana$a$ adalah laju kelahiran mangsa, b laju kematian mangsa akibat predasi, d laju pertumbuhan pemangsa akibat predasi,c adalah laju kematian alami pemangsa.

Dengan menambahkan asumsi adanya kompetisi dalam populasi mangsa yang dapat mempengaruhi laju perubahan jumlah populasi mangsa, maka model (1) menjadi

$$\dot{x} = x(a - \varepsilon x - by),$$

$$\dot{y} = dxy - cy, (2)$$

kemudian pemberian fungsi respon tipe Holling II pada interaksi populasi, selanjutnya model (2) menjadi

$$\dot{x} = x\left(a - \varepsilon x - \frac{by}{1+\alpha x}\right),$$

$$\dot{y} = y\left(-c + \frac{dx}{1+\alpha x}\right). \quad (3)$$

Sekarang dengan mempertimbangkan waktu tunda maka model (3) , dapat ditulis

$$\dot{x}(t) = x(t)\left(a - \varepsilon x(t) - \frac{by(t)}{1+\alpha x(t)}\right),$$

$$\dot{y}(t) = y(t)\left(-c + \frac{dx(t-\tau)}{1+\alpha x(t-\tau)}\right). \quad (4)$$

Dengan melinearisasi model (4) disekitar titik keseimbangan E^*, misalkan

$\mathrm{X(t)} = x(t) - x^* \mathrm{dan} \mathrm{Y(t)} = y(t) - y^*.$

Maka diperoleh model linarisasi

$$\dot{\mathrm{X}}(t) = \left(a - 2\varepsilon x^* - \frac{by^*}{(1+\alpha x^*)^2}\right)\mathrm{X(t)} - \frac{bx^*}{(1+\alpha x^*)}\mathrm{Y(t)},$$

$$\dot{\mathrm{Y}}(t) = \left(\frac{dy^*}{(1+\alpha x^*)^2}\right)\mathrm{X(t-\tau)} + \left(-c + \frac{dx^*}{(1+\alpha x^*)}\right)\mathrm{Y(t)}. \quad (5)$$

Dari model yang telah dilenearisasi diperoleh persamaan karakteristik

$$\Delta(\lambda, \tau) = \lambda^2 + a1\,\lambda + \mathbf{e}^{-\lambda\tau}a2 + a3 = 0, \quad (7)$$

dimana

$$a1 = \left(-\frac{dx^*}{(1+\alpha x^*)} + c - a + 2\varepsilon x^* + \frac{by^*}{(1+\alpha x^*)^2}\right),$$

$$a2 = \left(\frac{bdx^*y^*}{(1+\alpha x^*)^3}\right),$$

$$a3 = \left(\frac{adx^*}{(1+\alpha x^*)} - ac - \frac{2\,\varepsilon\, dx^{*2}}{(1+\alpha x^*)} + 2\,\varepsilon\, c\, x^* - \frac{bdx^*y^*}{(1+\alpha x^*)^3} + \frac{bcy^*}{(1+\alpha x^*)^2}\right).$$

Untuk $\tau = 0$, maka persamaan karakteristik (7) menjadi $\lambda^2 + a1\,\lambda + (a2 + a3) = 0$, Menurut Routh-Hurwitz nilai eigen dari persamaan karakteristik akan bernilai real dan negatif atau kompleks dengan bagian real negatif jika dan hanya jika

$$a1 > 0 \mathrm{dan} (a2 + a3) > 0. (8)$$

Selanjutnya untuk $\tau \neq 0$, misalkan $\lambda = iw,\ w > 0$ adalah akar-

akar persamaan karakteristik persamaan (7) , maka diperoleh

$$-w^2 + a1\, i\, w + a3 + a2\, cos(w\tau) - a2\, i\, sin(w\tau) = 0,$$

memisahkan bagian real dengan bagian imajiner, maka diperoleh

$$-w^2 + a3 + a2\, cos(w\tau) = 0,$$

$$a1\, w - a2\, sin(w\tau) = 0,$$

atau

$$-w^2 + a3 = -a2\, cos(w\tau),$$

$a1\, w =$

$a2\, sin(w\tau).$ m

engkuadratkan masing-masing ruas, sehingga persamaan (9) menjadi

$$w^4 - 2w^2 a3 + a3^2 = a2^2 cos^2(w\tau),$$

$$a1^2 w^2 = a2^2\, sin^2(w\tau),$$

serta menggabungkan persamaan tersebut, maka diperoleh polinomial derajat empat

$$w^4 + (a1^2 - 2a3)w^2 + (a3^2 - a2^2) = 0, \quad (10)$$

sehingga diperoleh,

$w_{\pm}^2 =$

$\frac{1}{2}\{-(a1^2 - 2a3) \pm \sqrt{(a1^2 - 2a3)^2 - 4(a3^2 - a2^2)}\}.$

Teorema 1 (Kar,2003).

Syarat kondisi perlu dan cukup untuktitik keseimbangan (x^*, y^*)menjadistabil asimptotikuntuk semua$\tau \geq 0$adalah sebagai berikut.

(1) Bagian real untuk setiap akar-akar dari$\Delta(\lambda, 0) = 0$ adalah negatif.

(2) Untuk setiap real $w$dan $\tau \geq 0$, $\Delta(iw, \tau) \neq 0$, dimana $i = \sqrt{-1}$.

Teorema 2 (Kar,2003).

Jika kondisi (8) dan teorema 1 terpenuhi lalu persamaan (10) tidak mempunyai akar real positif, maka titik keseimbangan (x^*, y^*) adalah stabil asimptotik untuk $\tau \geq 0$.

Untuk mengetahui kemungkinan adanya akar real positif dari digunakan aturan tanda Descartes yang dinyatakan sebagai berikut:

Misalkan $p(m) = a_0 m^{b_0} + a_1 m^{b_1} + a_2 m^{b_2} + \cdots + a_n m^{b_n}$ merupakan polinomial derajat n dengan koefisien real a_i, dan b_i adalah bilangan bulat yang memenuhi$0 \leq b_0 < b_1 < \cdots < b_n$. Maka banyaknya akar real positif dari $p(m)$sama dengan banyaknya variasi tanda dari koefisien polinomialnya $a_0, a_1, \ldots, a_n$ (Wang, 2004).

Selanjutnya dengan mensubstitusi persamaan $w_{\pm}^2$ ke persamaan maka diperoleh nilai τ

$$\tau_k = \frac{1}{w_{\pm}} \arctan\left(\frac{a1 w_{\pm}}{w_{\pm}^2 - a3}\right) + \frac{2k\pi}{w_{\pm}}, \quad k = 0,1,2,\ldots \quad (12)$$

Dibawah ini akan dianalisis titik keseimbangan yang dapat stabil pada saat

$\tau = 0$ atau memenuhi persamaan (8), dan akan dianalisis adakah nilai $\tau > 0$ yang dapat mengubah kestabilan dari titik keseimbangan tersebut.

Analisis Kestabilan Pada Titik Keseimbangan $\boldsymbol{E_1\left(\frac{a}{\varepsilon}, 0\right)}$

Untuk $\tau = 0$, dari persamaan karakteristik (7) dengan mensubstitusi titik keseimbangan E_1, maka diperoleh persamaan karakteristik$\lambda^2 + \left(a - \left(\frac{ad-\varepsilon c-\alpha ac}{\varepsilon+\alpha a}\right)\right)\lambda +$

$\left(-a\left(\frac{ad-\varepsilon c-\alpha ac}{\varepsilon+\alpha a}\right)\right) = 0$, dimana Menurut kriteria Routh-Hurwitz bagian real dari nilai eigen akan bernilai negatif dan disimpulkan stabil jika dan hanya jika$ad - \varepsilon c - \alpha ac < 0$.

Selanjutnya untuk $\tau \neq 0$, misalkan $\lambda = iw,\ w > 0$ adalah akar-akar persamaan karakteristik persamaan (7) , dengan menggunakan persamaan (10) , maka diperoleh

$$w^4 + (a1^2 - 2a3)w^2 + (a3^2 - a2^2) = 0,$$

dimana

$$(a1^2 - 2a3)$$

$$= \left(\left(a - \left(\frac{ad - \varepsilon c - \alpha ac}{\varepsilon + \alpha a}\right)\right)^2 - 2\left(-a\left(\frac{ad - \varepsilon c - \alpha ac}{\varepsilon + \alpha a}\right)\right)\right)$$

$$= \frac{(ad - \varepsilon c - \alpha ac)^2 + a^2\varepsilon^2 + \alpha^2 a^4 + 2\alpha a^3 \varepsilon}{(\varepsilon + \alpha a)^2}$$

$> 0,$

$$(a3^2 - a2^2)$$

$$= \left(-a\left(\frac{ad - \varepsilon c - \alpha ac}{\varepsilon + \alpha a}\right)\right)^2 - 0$$

$$= \left(-a\left(\frac{ad - \varepsilon c - \alpha ac}{\varepsilon + \alpha a}\right)\right)^2 > 0,$$

karena
$(a1^2 - 2a3) > 0$dan$(a3^2 - a2^2) >$

0. (13)

Menurut aturan tanda Descartes, persamaan (10) akan memiliki paling tidak satu akar real positif jika variasi perubahan tanda koefisien polinomnya lebih dari satu atau sama dengan satu. Dalam hal ini akan ditinjau bahwa $(a1^2 - 2a3)$ dan $(a3^2 - a2^2)$ memiliki tanda yang berbeda. Karena dari persamaan (13) diperoleh $(a1^2 - 2a3) > 0$ dan $(a3^2 - a2^2) >$ 0 menyebabkan persamaan polinomial (10) tidak memiliki variasi perubahan tanda koefisien, sehingga persamaan (10) tidak memiliki akar real positif.

Dengan demikian tidak diperoleh nilai $\tau > 0$ yang dapat mengubah kestabilan titik keseimbangan E_1 atau dengan kata lain titik keseimbangan E_1stabil untuk≥ 0 .

Analisis Kestabilan Pada Titik Keseimbangan $\boldsymbol{E_2\left(\frac{c}{d-\alpha c}, \frac{(ad-\varepsilon c-\alpha ac)d}{b(d-\alpha c)^2}\right)}$

Titik keseimbangan E_2 akan berada pada kuadran pertama, jika$d - \alpha c > 0$ dan$(ad - \varepsilon c - \alpha ac) > 0$.Untuk $\tau = 0$, dari persamaan karakteristik (7) dengan mensubstitusi titik keseimbangan E_2, maka diperoleh persamaan karakteristik

$\lambda^2 + \frac{(\varepsilon d-\alpha ad+\alpha\varepsilon c+\alpha^2 ac)\, c}{d(d-\alpha c)}\lambda +$

$\frac{(ad-\varepsilon c-\alpha ac)c}{d} = 0$, dimana bagian real dari nilai eigen akan bernilai negatif dan disimpulkan stabil jika dan hanya jika$\varepsilon d - \alpha ad + \alpha\varepsilon c + \alpha^2 ac > 0$.

Selanjutnya untuk $\tau \neq 0$, misalkan $\lambda = iw,\ w > 0$ adalah akar-akar persamaan karakteristik persamaan (7) , dengan menggunakan persamaan (10) , maka diperoleh

$$w^4 + (a1^2 - 2a3)w^2 + (a3^2 - a2^2) = 0,$$

dimana

$$(a1^2 - 2a3) = \left(\frac{(\varepsilon d - \alpha ad + \alpha\varepsilon c + \alpha^2 ac)\, c}{d(d - \alpha c)}\right)^2 > 0,$$

$$(a3^2 - a2^2) = -\left(\frac{(ad - \varepsilon c - \alpha ac)c}{d}\right)^2 < 0.$$

karena

$$(a1^2 - 2a3) > 0 \text{dan} (a3^2 - a2^2) < 0. \quad (14)$$

Menurut aturan tanda Descartes, persamaan (10) akan memiliki paling tidak satu akar real positif jika variasi perubahan tanda koefisien polinomnya lebih dari satu. Dalam hal ini akan ditinjau bahwa $(a1^2 - 2a3)$ dan $(a3^2 - a2^2)$ memiliki tanda yang berbeda. Karena dari (14) diperoleh $(a1^2 - 2a3) > 0$ dan $(a3^2 - a2^2) < 0$ sehingga persamaan karakteristik w diatas memiliki $w_0$satu akar real positif atau solusi unik positif.Sehingga dengan mensubstitusiw_0^2 ke persamaan (12) untuk mendapatkan τ, maka diperoleh

$$\tau_{0n} = \frac{1}{w_0} arctan\left(\frac{a1w_0}{w_0^2 - a3}\right) + \frac{2n\pi}{w_0}, \quad n = 0,1,2,3, \ldots$$

selanjutnya mendifferensialkan persamaan (7) terhadap τ, diiperoleh

$$\left[2\lambda + a1 - \tau a2\, e^{-\lambda t}\right]\frac{d\lambda}{d\tau} = \lambda a2\, e^{-\lambda t}, \quad (15)$$

sehingga

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} = \frac{2\lambda + a1}{\lambda a2\, e^{-\lambda t}} - \frac{\tau}{\lambda},$$

dari persamaan (7), diketahui$e^{-\lambda t} = -\left(\frac{\lambda^2+a1\,\lambda+a3}{a2}\right)$,maka diperoleh

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} = \frac{2\lambda + a1}{-\lambda\,(\lambda^2 + a1\,\lambda + a3)} - \frac{\tau}{\lambda}, \qquad (16)$$

sehingga,

$$sign\frac{d(Re\lambda)}{d\tau}_{\lambda=iw} = sign\left\{Re\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1}\right\}_{\lambda=iw}$$

$$= sign\left\{\left(\frac{a1^2 + 2w^2 - 2a3}{a1^2w^2 + (w^4 - 2a3w^2 + a3^2))}\right)\right\},$$

dari persamaan (10), telah diketahui bahwa

$$w^4 - 2a3w^2 + a3^2 = -a1^2w^2 + a2^2$$

maka diperoleh

$$sign\frac{d(Re\lambda)}{d\tau}_{\lambda=iw} = sign\left\{\left(\frac{2w^2 + a1^2 - 2a3}{a2^2}\right)\right\}. \qquad (17)$$

Teorema 3(Kar,2003).

Jika persamaan (8) dan (14) terpenuhi, maka titik ekuilibrium (x^*, y^*) adalah stabil asimptotik untuk $\tau < \tau_0$ dan tidak stabil untuk $\tau > \tau_0$, dan di titik (x^*, y^*) akan terjadi bifurkasi (solusi periodik amplitudo kecil), pada saat $\tau_0 = \tau_{0n}$ dimana $n = 0$.

Bukti :

Untuk $\tau = 0, (x^*, y^*)$ adalah stabil asimptotik jika kondisi (8) terpenuhi.Karena (x^*, y^*) akan stabil untuk $\tau < \tau_0$. Maka akan ditunjukkan bahwa

$$\frac{d(Re\lambda)}{d\tau}_{\tau=\tau_0, w=w_0} > 0, (18)$$

Iniakan menunjukkanbahwa terdapatsetidaknya satunilai eigendenganbagian realpositif untuk$\tau > \tau_0$. Dari persamaan (17) dan (11) dapat dituliskan

$$sign\frac{d(Re\lambda)}{d\tau}_{\lambda=iw_0} = sign\left\{\left(\frac{2w_0^2 + a1^2 - 2a3}{a2^2}\right)\right\}$$

$$= sign\left\{\left(\frac{\sqrt{(a1^2 - 2a3)^2 - 4(a3^2 - a2^2)}}{a2^2}\right)\right\},$$

sehingga

$$\frac{d(Re\lambda)}{d\tau}_{\tau=\tau_0, w=w_0} > 0.$$

Oleh karena itu, kondisi transversability terpenuhi dan karenanya terjadi bifurkasi di $\tau = \tau_0, w = w_0$.

Simulasi Numerik

Simulasi dilakukan menggunakan nilai parameter yang diberikan oleh Xio dkk (2011), yaitu $a = 1.2, b = 0.1, c = 0.2, d = 0.4$, $\varepsilon = 0.6$ dan $\alpha = 0.1$serta dengan menggunakan syarat awal, yaitu

$$x(0) = 0.55 \text{dan} y(0) = 10$$

Pada saat $\tau = 0$ diperoleh bahwa sistem akan stabil asimptotik pada titik keseimbangan

$E_2 = (0.5263157894\ , 9.307479224)$, dengan $w_0 = 0.3675898607$ dan $\tau_0 = 1.731007353$. Dimana titik E_2 akan stabil asimptotik di$\tau < \tau_0$ dan tidak stabil pada saat $\tau > \tau_0$, dan mengalami solusi periodik bifurkasi di $\tau = \tau_0$.

Hasil simulasi pada gambar 1 memperlihatkan bahwa pada saat $\tau < \tau_0$,yaitu $\tau = 1.65$, maka populasi akan stabil dan menuju ketitik keseimbangan$E_2 = (0.5263157894\ , 9.307479224)$, kemudian gambar 2,3,dan4 memperlihatkan bahwa pada saat $\tau = \tau_0$,yaitu $\tau = \tau_0 = 1.731007353$, maka terjadi bifurkasi solusi periodik disekitar titik keseimbangan$E_2 = (0.5263157894\ , 9.307479224)$. Sedangkan padagambar 5 terlihat bahwa pada saat $\tau > \tau_0$, yaitu $\tau = 1.8$, maka populasi tidak stabil dan menjahui titik keseimbangan $E_2 = (0.5263157894\ , 9.307479224)$.

E. KESIMPULAN

Dari model mangsa pemangsa dengan fungsi respon tipe Holling II diperoleh tiga titik keseimbangan, yaitu $E_0 = (0,0)$, $E_1 = (\frac{a}{\varepsilon}, 0)$ dan$E_2 = \left(\frac{c}{d-\alpha c}, \frac{(ad-\varepsilon c-\alpha ac)d}{b(d-\alpha c)^2}\right)$. Dari hasil analisis diperoleh dua titik keseimbangan yang dapat stabil pada kondisi syarat tertentu, yaitu titik keseimbangan $E_1 = (\frac{a}{\varepsilon}, 0)$ stabil jika $ad - \varepsilon c - \alpha ac < 0$ dan titik keseimbangan $E_2 = \left(\frac{c}{d-\alpha c}, \frac{(ad-\varepsilon c-\alpha ac)d}{b(d-\alpha c)^2}\right)$ stabil jika $\varepsilon d - \alpha ad + \alpha \varepsilon c + \alpha^2 ac > 0$.Sedangkan dengan pemberian waktu tunda diperoleh nilai $\tau > 0$ yang dapat mengubah kestabilan dari titik keseimbangan $E_2 \left(\frac{c}{d-\alpha c}, \frac{(ad-\varepsilon c-\alpha ac)d}{b(d-\alpha c)^2}\right)$ dari stabil menjadi tidak stabil.Diharapkan pada penelitian berikutnya model yang ditinjau lebih dikembangkan dengan menambah berbagai macam pertimbangan asumsi agar mendekati fenomena realistis kehidupan,serta model yang melibatkan fungsi respon, yang saat ini berkembang dengan model tipe Holling III dan IV.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Beretta, E.,dan Kuang, Y. 1996.Convergence Results in a Well-Known Delayed Predator-Prey System.*J. Math. Anal.* 204: 840-853.

[2] Kar,T.K. 2003. Selective Harvesting in a Prey Predator Fishery With Time Delay. *Mathematical And Computer Modelling*.38:449-458.

[3] Liu, X.,dan Chen, L. 2003.Complex Dynamics of Holling Type II Lotka-Volterra Predator-Prey System with

Impulsive Perturbations on the Predator.*Chaos, Solutions and Fractals*. 16: 311-320.

[4] Olinick, M. 2006. *Modeling the Predator-Prey Relationship*.MAA Session on Environmental Mathematics.

[5] Ruan, S. 2009. On Nonlinear Dynamics of Predator-Prey Models with Discrete Delay.*Math.Model. Nat. Phenom.* 4:140-188.

[6] Ruan, S.,dan Xiao, D. 2001.Global Analysis in a Predator-Prey System with Nonmonotonic Functional Response.*SIAM J. Appl. Math.*Vol. 61, No. 4, pp:1445–1472.

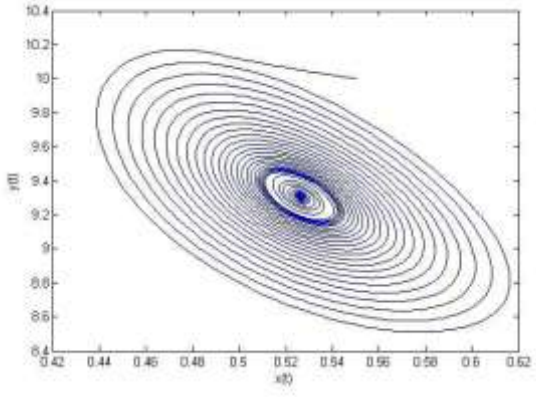
[7] Teng,Y., Li, S., Shi, J., Li, D., dan Zhang, X. 2011. Bifurcation in a Predator-prey Model with Time Delay and Stocking Rate.*Chinese Control and DecisionConference*.

[8] Tian, X.,dan Xu, R. 2011. Global Dynamics Of A Predator Prey System with Holling Type II Functional Response. *Modelling and Control.*16 : 242–253.

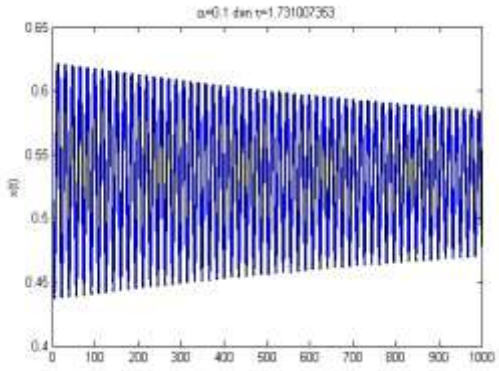
[9] Wang, X. 2004.A Simple Proof of Descartes's Rule of Signs.*JSTOR*. 111: 525-526.

[10] Zhang, X., Xu, R., dan Gan, Q. 2011.Periodic Solution in a Delayed Predator Prey Model with Holling Type III Functional Response and Harvesting Term.*World Journal of Modelling and Simulation*. 7: 70-80

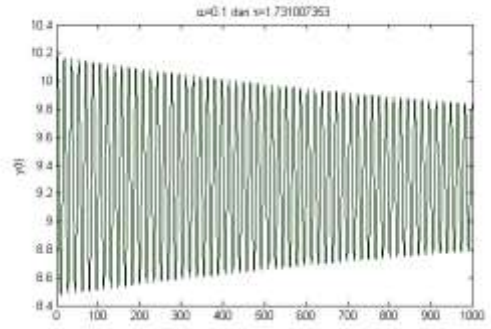
LAMPIRAN



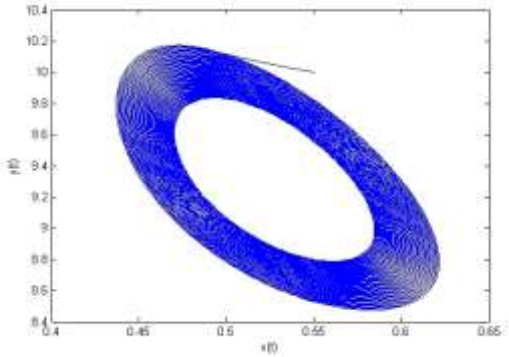
Gambar 1. Trayektori dari $x(t), y(t)$ dengan$x(0) = 0.55$, $y(0) = 10$,$c = 0.2$ $\alpha = 0.1$ dan $\tau = 1.65$



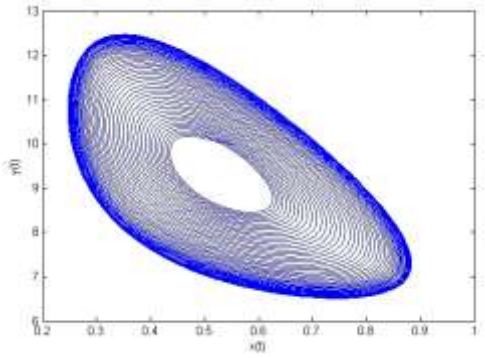
Gambar 2. Populasi mangsa terhadap waktu $x(t)$dengan $x(0) = 0.55$, $c = 0.2$, $\alpha = 0.1$ dan $\tau = 1.731007353$



Gambar 3. Populasi pemangsa terhadap waktu $y(t)$dengan $y(0) = 10$, $c = 0.2, \alpha = 0.1$ dan $\tau = 1.731007353$



Gambar 4. Trayektori dari $x(t), y(t)$ dengan $x(0) = 0.55, y(0) = 10, c = 0.2,$ $\alpha = 0.1$ dan$\tau = 1.731007353$



Gambar 5. Trayektori dari $x(t), y(t)$ dengan $x(0) = 0.55$, $y(0) = 10, c = 0.2, \alpha = 0.1,$ dan $\tau = 1.8$